หน่วยการเรียนรู้ที่ 2
ดอกเบี้ย

2.1 ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เรื่องอนุกรม

ในการศึกษาคณิตศาสตร์ด้านการเงิน จำเป็นต้องมีพื้นฐานในเรื่องลำดับและอนุกรม

ลำดับ (sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต { 1 , 2 , 3 , … , n } หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ในการเขียนแสดงลำดับ จะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน ตัวอย่างเช่น 5 , 10 , 15 , 20 , 25

เรียกจำนวนแต่ละจำนวนที่เรียงกันนี้ว่า พจน์ (Term) และเรียก a_n ว่าพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ ในตัวอย่างนี้ พจน์ที่ 1 ของลำดับมีค่าเป็น 5 โดยจะใช้สัญลักษณ์ว่า $a_1 = 5$

เรียกลำดับที่มีโดนเมนเป็นเซต { 1 , 2 , 3 , … , n } ว่า ลำดับจำกัด (finite sequence) และเรียกลำดับที่มีโดนเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกว่า ลำดับอนันต์ (infinite sequence)

อนุกรม (series) คือการหาผลบวกของลำดับซึ่งเป็นจำนวนต่างๆ ที่เรียงกันอย่างมีระบบ ถ้าหาผลบวกจากลำดับจำกัด เราเรียกว่า อนุกรมจำกัด (finite series) แต่ถ้าหาผลบวกจากลำดับอนันต์ เราเรียกว่า อนุกรมอนันต์ (infinite series)

อนุกรมที่เราควรรู้จักมี 2 ประเภท คือ อนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต

2.1.1 อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic Series)

บทนิยาม **ลำดับเลขคณิต** (Arithmetic Sequence) คือลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ n+1 ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า **ผลต่างร่วม** (common difference)

จากบทนิยาม ลำดับ $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n , . . .$ จะเป็นลำดับเลขคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว d ที่ $a_{n+1} – a_n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n นอกจากนี้ยังสามารถกำหนดลำดับเลขคณิตได้ว่า $a_{n+1} = a_n + d$ เมื่อให้ a_1 แทนพจน์ที่ 1 ของลำดับ จะได้ว่า

พจน์ที่ 2 ของลำดับ คือ $a_2 = a_1 + d$

พจน์ที่ 3 ของลำดับ คือ $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$

พจน์ที่ 4 ของลำดับ คือ $a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับ คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต เรียกว่า **อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic Series)**
เมื่อให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้ว่า

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$

....(1)

หรืออาจเขียน S ใหม่ได้เป็น

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

$= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-1)d)$

....(2)

(1) + (2) จะได้

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)$

$2S_n = n(a_1 + a_n)$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

และ เนื่องจาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$

$= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)}$$

2.1.2 อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series)

บทนิยาม **ลำดับเรขาคณิต** (Geometric Sequence) คือลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ n+1 ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วนนี้ว่า **อัตราส่วนร่วม** (common ratio)

จากบทนิยาม ลำดับ a_1 , a_2 , a_3 , . . . , a_n , . . . จะเป็นลำดับเรขาคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว r ที่ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ = r สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n นอกจากนี้ยังสามารถกำหนดลำดับเลขคณิตได้ว่า $a_{n+1} = a_n r$ เมื่อให้ a_1 แทนพจน์ที่ 1 ของลำดับ จะได้ว่า

พจน์ที่ 2 ของลำดับ คือ $a_2 = a_1 r$

พจน์ที่ 3 ของลำดับ คือ $a_3 = a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2$

พจน์ที่ 4 ของลำดับ คือ $a_4 = a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3$

⋮

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับ คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต เรียกว่า **อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series)** เมื่อให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้ว่า

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

⋮

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + . . . + a_n$

$= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + . . . + a_1 r^{n-1}$ ……………………………………(3)

(3) x r ได้เป็น

$r S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + . . . + a_1 r^n$ ……………………………………(4)

(4) – (3) จะได้

$r S_n - S_n = a_1 r^n - a_1$

$S_n(r-1) = a_1(r^n-1)$

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \quad , \; r \neq 1$$

หรือ $$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad , \; r \neq 1$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \quad , \; r \neq 1 \quad \text{หรือ} \quad S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad , \; r \neq 1}$$

และ เนื่องจาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \quad , \; r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1} \quad , \; r \neq 1$$

$$S_n = \frac{(a_1 r^{n-1})r - a_1}{r-1} \quad , \; r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1} \quad , \; r \neq 1$$

หรือ $$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} \quad , \; r \neq 1$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1} \quad , \; r \neq 1 \quad \text{หรือ} \quad S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} \quad , \; r \neq 1}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิตต่อไปนี้

$1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกอนุกรมต่อไปนี้

$$4 + 7 + 10 + . . . + 301$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $2 + 2^2 + 2^3 + . . . + 2^{10}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

$$5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + . . . + \frac{5}{81}$$

<u>แบบฝึกหัดที่ 2.1</u>

1. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

1) $1 + 3 + 5 + . . . + 99$

....

....

....

....

....

....

....

2) $2 + 4 + 6 + . . . + 100$

....

....

....

....

....

....

....

3) $7 + 11 + 15 + . . . + 87$

....

....

....

....

....

....

....

....

4) $100 + 97 + 94 + \ldots + 1$

5) $1 + 2 + 4 + \ldots + 128$

6) $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{3}{256}$

7) $2 + 6 + 18 + . . . + 162$

8) $3 + 6 + 12 + . . . + 384$

2. จงแสดงว่า

1) $1 + 2 + 3 + . . . + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.2 ดอกเบี้ย

2.2.1 ดอกเบี้ย

ดอกเบี้ย (interest) คือ เงินที่ได้รับเพิ่มขึ้นหรือผลประโยชน์ตอบแทนจากการลงทุน (ฝากหรือให้ยืมเงิน) โดยการคำนวณเป็นอัตราร้อยละต่อปี ในที่นี้เราจะศึกษาวิธีการคิดดอกเบี้ย 2 ประเภทคือ ดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว และดอกเบี้ยทบต้น

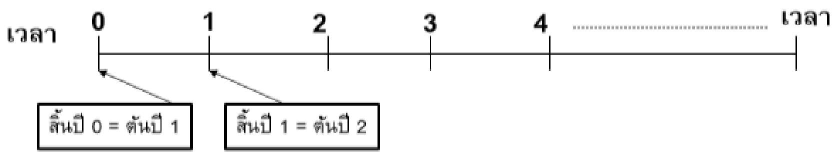
การคิดดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว ปกติจะเป็นการคิดในการกู้เงินระยะสั้น (สั้นกว่า 1 ปี) ถ้าเป็นการกู้ระยะยาว จะคิดดอกเบี้ยหลายครั้ง ดอกเบี้ยจะถูกทบรวมเข้ากับเงินต้น เป็นเงินต้นของงวดต่อไปซึ่งเราเรียกว่า ดอกเบี้ยทบต้น แต่ในบางกรณีถึงแม้ระยะเวลามากกว่า 1 ปี เราอาจคิดแบบดอกเบี้ยเชิงเดี่ยวก็ได้

2.2.2 ผังเวลา

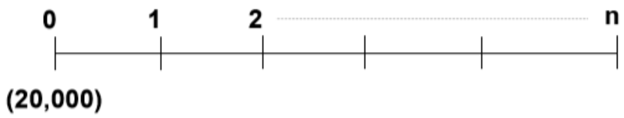
ผังเวลา หรือ เส้นเวลา (time line) หมายถึง แผนผังหรือเส้นที่แสดงให้เห็นถึงจังหวะเวลาที่เกิดกระแสเงินสดขึ้น ว่ากระแสเงินสดต่าง ๆ ในอนาคตจะเกิดขึ้นเมื่อใด และจำนวนเท่าใด ทำให้ง่ายและสะดวกต่อการหามูลค่าของเงินตามเวลาที่ต้องการ ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้เงินกู้ 100 บาท อัตราดอกเบี้ย 5% เวลา 1 ปี ดอกเบี้ยคิดเป็น 5 บาท เขียนเป็นผังเวลาแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนเงินกับเวลาได้ดังนี้

ในการคำนวณเรื่องดอกเบี้ย ถ้ามีกระแสเงินสดหลายรายการและระยะเวลาต่าง ๆ กัน ควรมีการเขียนผังเวลาเพื่อช่วยให้การคำนวณกระทำได้ด้วยความเข้าใจ และไม่ผิดพลาด ในกรณีที่ยังไม่ทราบจำนวนเงิน ณ จุดเวลาต่าง ๆ เราอาจใช้สัญลักษณ์แทนเงินไปก่อน เมื่อคำนวณแล้วจึงนำค่ามาเทียบเพื่อตรวจสอบ ความถูกต้อง

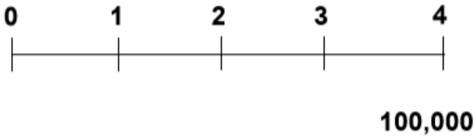
ตัวอย่างที่ 5 พิจารณาช่วงเวลาเพื่อช่วยในการคำนวณ



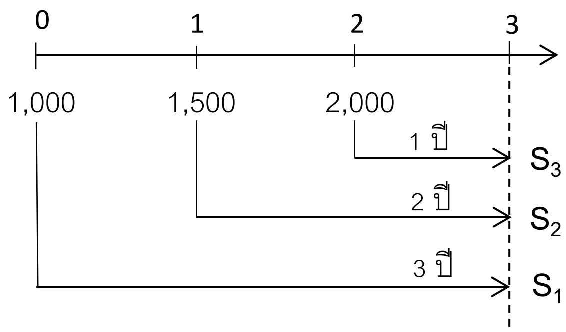
ตัวอย่างที่ 6 เงินต้นมีค่า 20,000 บาท



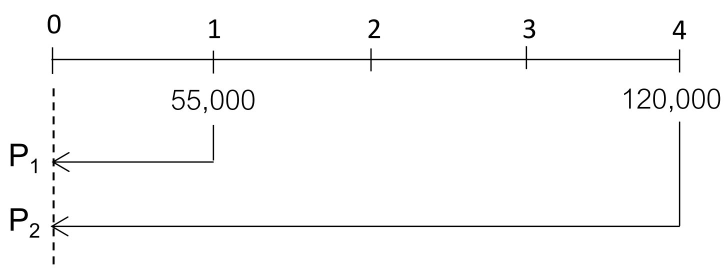
ตัวอย่างที่ 7 เงินเมื่อสิ้นปีที่ 4 มีค่า 100,000 บาท



ตัวอย่างที่ 8 ฝากเงิน 1,000 บาท เมื่อครบ 1 ปี ฝากเงินอีก 1,500 บาท และ ฝากเงิน 2,000 บาทในปีถัดมา พิจารณาเงินรวมเมื่อครบปีที่ 3



ตัวอย่างที่ 9 กู้เงินโดยชำระ 2 งวด ยอดแรก ชำระ 55,000 บาท ในอีก 1 ปีข้างหน้า ส่วนยอดที่ 2 ต้องชำระ 120,000 บาท ในอีก 4 ปีข้างหน้า พิจารณาจำนวนเงินทั้งหมดที่กู้



2.3 ดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว

ดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว (simple interest) เป็นการคิดดอกเบี้ยเพียงครั้งเดียวหลังจากครบกำหนดเวลาในการฝาก หรือการกู้ยืม ซึ่งโดยปกติดอกเบี้ยเชิงเดี่ยวจะเป็นการคิดในการกู้เงินระยะสั้น (สั้นกว่า 1 ปี) ดอกเบี้ยเชิงเดี่ยวนี้ยังมีชื่อเรียกได้หลากหลายเช่น ดอกเบี้ยคงต้น ดอกเบี้ยอย่างง่าย

เมื่อกำหนดสัญลักษณ์ให้ P = เงินต้น

t = ระยะเวลาในการฝาก/กู้เงิน (หน่วยเป็นปี)

r = ดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาทในระยะเวลา 1 ปี

I = ดอกเบี้ย

ดังนั้นดอกเบี้ยเงินต้น P ใน 1 ปี มีค่าเท่ากับ Pr บาท

ดอกเบี้ยของเงินต้น P ใน t ปี มีค่าเท่ากับ $I = Prt$ บาท

ดังนั้นรวมเงินทั้งหมดเท่ากับ $S = P + Prt = P(1+rt)$ บาท

ตัวอย่างที่ 10 ธนาคารแห่งหนึ่งรับฝากเงินโดยให้ดอกเบี้ย 5% ถ้าชายคนหนึ่งฝากเงิน 25,000 บาท เป็นระยะเวลา 9 เดือน จงหา

1) ดอกเบี้ยที่เขาได้รับ

2) ยอดเงินรวม

ตัวอย่างที่ 11 เงินต้น 4,000 บาท เวลา 6 เดือน ได้ดอกเบี้ย 600 บาท อัตราดอกเบี้ยเป็นเท่าใด

ตัวอย่างที่ 12 ถ้าอัตราดอกเบี้ย 12% เงินต้นเท่าใด จึงจะได้ดอกเบี้ย 1,300 บาทในเวลา 8 เดือน

ตัวอย่างที่ 13 ถ้าอัตราดอกเบี้ย **7%** จะต้องฝากเงิน 50,000 บาท นานเท่าใด จึงจะได้ดอกเบี้ย 1,400 บาท

ตัวอย่างที่ 14 ลงทุนในธุรกิจอย่างหนึ่งเงินลงทุน 45,000 บาท ได้กำไร 1,200 บาทในเวลา 3 เดือน จงหาอัตราผลตอบแทน

ตัวอย่างที่ 15 สามีภรรยาคู่หนึ่ง ซื้อบ้านราคา 780,000 บาท โดยกู้เงินจากธนาคารอัตราดอกเบี้ย 9% ต้องผ่อนส่งเดือนละ 6,220 บาท จงหาว่าในแต่ละเดือนนั้น เขาจ่ายเป็นค่าดอกเบี้ยเท่าใดและเป็นค่าเงินต้นเท่าใด

ตัวอย่างที่ 16 ชายคนหนึ่งฝากเงินกับธนาคารทุกเดือน เดือนละ 1,000 บาท ธนาคารให้ดอกเบี้ยอัตรา 9% เมื่อสิ้นปี เขาจะได้รับดอกเบี้ยรวมกันเท่าใด ถ้าคิดดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว

<u>แบบฝึกหัดที่ 2.3</u>

1. จงหาดอกเบี้ยของเงินต้น 7,500 บาท อัตราดอกเบี้ย 7% เวลา 4 เดือน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. จงหาดอกเบี้ยและเงินรวม(เงินต้นรวมกับดอกเบี้ย) ของเงินต้น 11,250 บาท อัตราดอกเบี้ย 12% ระยะเวลา 7 เดือน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. สมชายกู้เงินจากสหกรณ์ออมทรัพย์ 200,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 14% ทุกๆ เดือน สมชายต้องจ่ายเงินคืนเงินต้น 2,000 บาท พร้อมทั้งดอกเบี้ยของเงินต้นที่มีอยู่ตอนต้นเดือน จงหาว่าในเดือนแรกสมชายต้องจ่ายดอกเบี้ยเท่าใด

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. จากข้อ 3. จงเขียนตารางแสดงจำนวนเงินที่สมชายต้องจ่ายเงินกู้ 5 เดือนแรก

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. สมศรีกู้เงินธนาคาร 400,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 12% ทุก ๆ เดือน สมศรีต้องจ่ายเดือนละ 6,000 บาท เงินจำนวนนี้ส่วนหนึ่งเป็นดอกเบี้ยของเงินต้นที่มีอยู่ตอนต้นเดือน และอีกส่วนหนึ่งเป็นการจ่ายคืนเงินต้น จงหาว่าในเดือนแรกนั้นสมศรีจ่ายดอกเบี้ยเท่าใด และจ่ายเงินต้นเท่าใด

6. สมหญิงกู้เงิน 1,500 บาท เวลา 2 เดือน ต้องจ่ายคืนพร้อมดอกเบี้ย 1,590 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ย

7. พ่อค้านำเงินไปลงทุน 40,000 บาท ได้ผลตอบแทนคืนทั้งหมดเป็นเงิน 43,700 บาท ในเวลา 6 เดือน จงหาอัตราผลตอบแทน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. สมชัยกู้เงินมา 30,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 10 % เมื่อนำเงินไปคืนพร้อมดอกเบี้ย เขาต้องจ่ายเอกเบี้ย 750 บาท จงหาว่า สมชัยกู้ไปนานเท่าใด

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9. สมทรงกู้เงินมาจำนวนหนึ่ง อัตราดอกเบี้ย 7% เวลา 8 เดือน ต้องเสียดอกเบี้ย 105 บาท สมทรงกู้เงินมาเท่าใด

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. สมภพลงทุนพิมพ์หนังสือขาย ภายใน 15 เดือน เขาได้กำไร 26,000 บาท ซึ่งคิดเป็นร้อยละ ได้ร้อยละ 13 ต่อปี จงหาเงินลงทุน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....